

ПРОДУКТИВНОСТЬ В РАМКАХ ETAS МОДЕЛИ Г.МОЛЧАН

“Закон продуктивности землетрясений опровергает общепринятые до сих пор модели сейсмичности в виде ветвящихся стохастических процессов, но дает четкий и простой путь для исправления таких моделей”

[К 30-летию ИТПЗ РАН, стр. 11 , 2019]

ЗАКОНЫ продуктивности

продуктивность события m_0 : число инициированных им событий

$v_{\Delta}(m_0) - \# \{ \text{прямые потомки } m \geq m_0 - \Delta \}$ - Δ продуктивность

$V_{\Delta}(m_0) - \# \{ \text{все потомки } m \geq m_0 - \Delta \}$ полная Δ продуктивность

I. (Shebalin et al., Geophys. J. Int, 222, 2020)

$$P(v_{\Delta} = n) = p^n (1 - p) \quad (\text{Geometric distribution})$$

II. (Шебалин и др. ДАН 481:3 2018)

$$P(V_{\Delta} = n | m_0 - \text{гл. событие}) = p^n (1 - p)$$

Наблюдения: $V_{\Delta}(m_0)$ -главное событие

С.Соловьев & О.Соловьева (1962)-

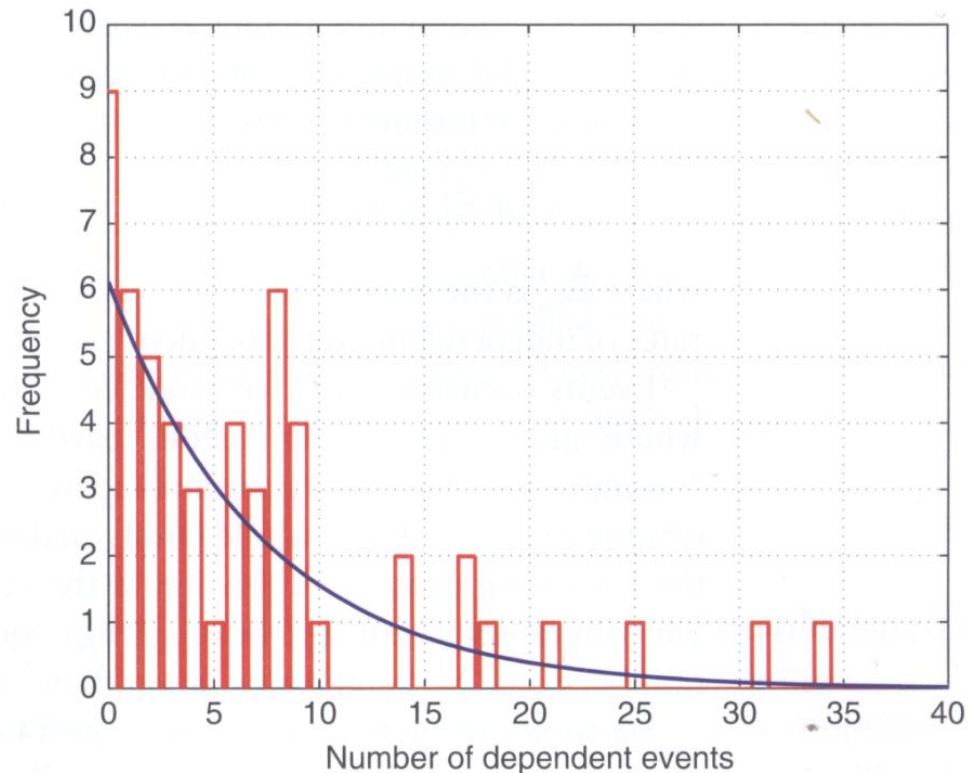
G-распределение

T=1954-1961 Pacific Belt ($m_0 \approx 7; \Delta = 2$)

Камчатка-Курилы ($m_0 \approx 6; \Delta = 2$).

Kagan (2010):

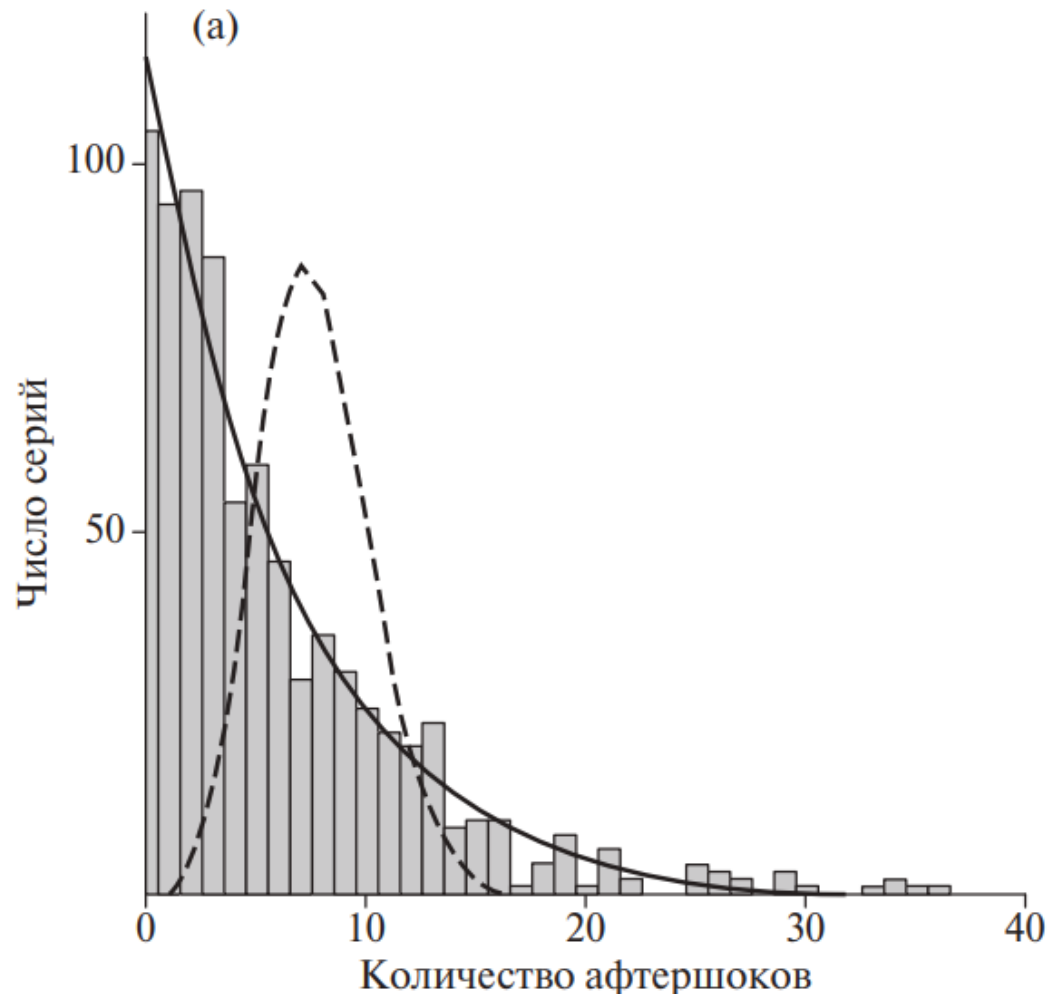
PDE (1977-2007), $m_0 = 7.1 - 7.2$ -
бимодальное распределение



Shebalin et al. (2018):

ANSS (1975-2018) $m_0 \geq 6.5, \Delta = 2$

G-распределение



Наблюдения: ν_{Δ} (m_0 - любое событие)

Shebalin et al
Geophys. J. Int, 222, 2020

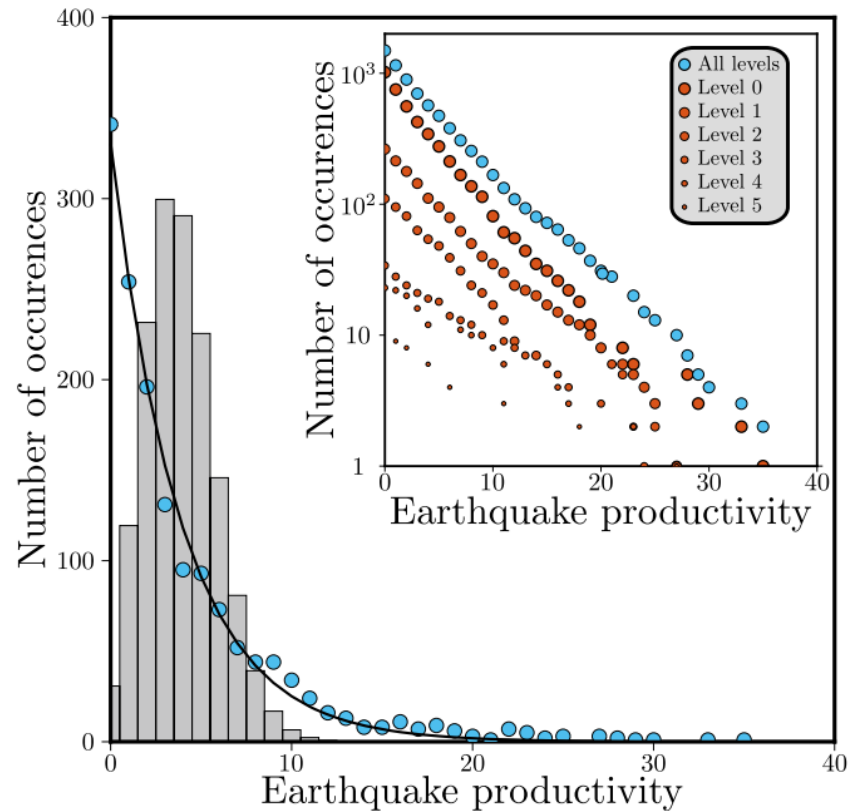


Figure 1. Earthquake productivity in the worldwide catalogue. Dots show the distribution of the number of triggered events for $M \geq 6.5$ earthquakes using a relative magnitude threshold $\Delta M = 2$. The solid line is the exponential law with parameter Λ_2 , the mean number of triggered events derived from the data. The histogram shows the Poisson distribution with parameter Λ_2 . Inset shows the cumulative productivity distributions for primary and secondary triggering events.

Наблюдения: V_{Δ} (m_0 -любое событие)

Zaliapin, BenZion, 2016

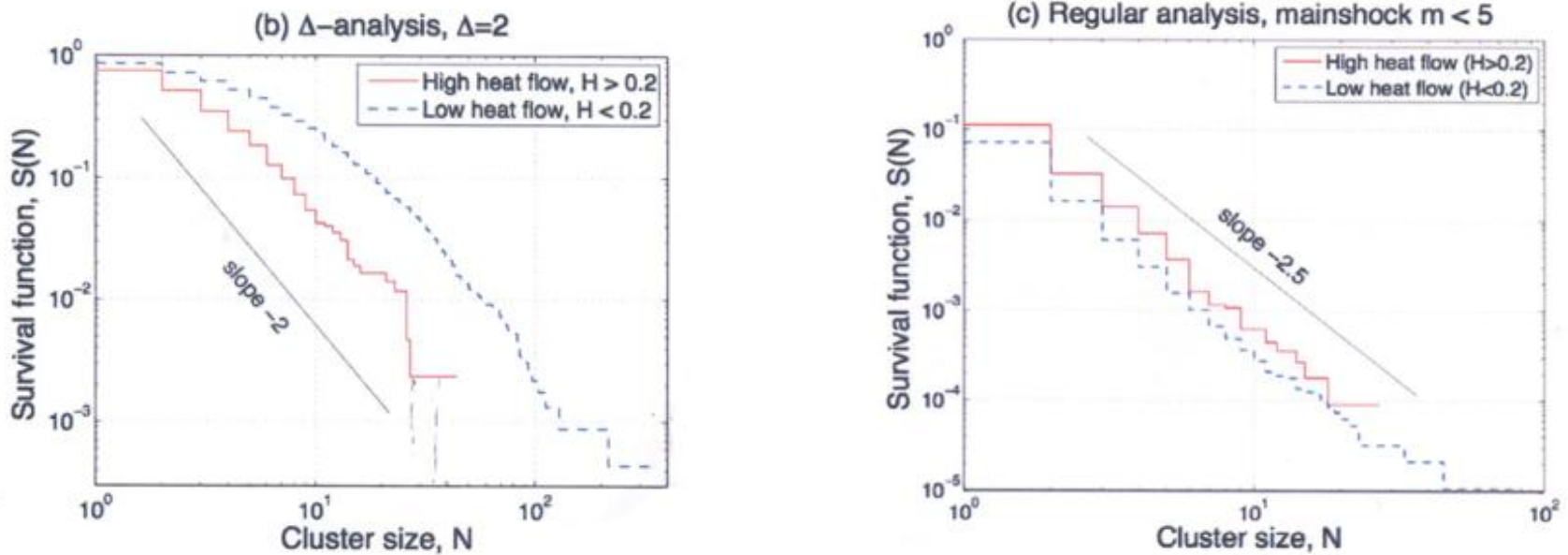


Figure 8: Distribution of cluster size N in regions with high ($H > 0.2$, red solid line) and low ($H < 0.2$, blue dashed line) values of heat flow. For families, the heat flow value is estimated at the mainshock epicenter. The y-axis shows the survival function $S(N) = \text{Prob.}[\text{cluster size} > N]$. The lines that correspond to power laws $S(N) \propto N^{-\alpha}$ with indices $\alpha = 1$ and $\alpha = 2$ are shown for visual convenience. (a) Regular analysis, all clusters. (b) Delta analysis with $\Delta = 2$. (c) Regular analysis, clusters with mainshock magnitude $m < 5$.

ЗАДАЧА

Дано:

- 1) $v_{\Delta}(m_0)$ - G распределение (Пуассон в ETAS модели)
- 2) сильное различие распределений $V_{\Delta}(m_0)$ – для произвольных и доминирующих событий

Цель:

- расширить класс ETAS моделей
- понять (2) на моделях ETAS

ETAS модель

Поле случайных событий $x = (t, g, m)$

Традиционное определение через условную интенсивность

$$\lambda(x|\cup x_i : t(x_i) < t(x)) = \mu(g(x)) f_1(m(x)) + \sum_i \lambda(m(x_i)) p(x|x_i)$$

$$p(x|x_0) = f_1(m) f_2(t - t_0) f_3[(g - g_0)|m_0]$$

$$\lambda(m) = \lambda e^{\alpha \cdot m}, m \geq 0$$

-копия закона Утсу для афтершоков

$$f_1(m) = \beta \exp(-\beta m), m \geq 0; \beta > \alpha$$

- закон Гутенберга-Рихтера

$$f_2(t) = (p-1)(t/c+1)^{-p} / c$$

- копия закона Омори для афтершоков

NB. Распределение F прямых потомков скрыто в определении и поэтому вопрос о его виде не ставился

ETAS (F):

начальное событие

$$x_0 = (t_0, g_0, m_0)$$



1-ое поколение

$$\{(t, g, m)_1 \quad (t, g, m)_2 \quad \dots \quad (t, g, m)_{\nu(m_0)}\} \quad \mathbf{(A)}$$



последующие поколения

аналогичны *in law* и независимы

$$P(\nu(m) \leq n) = F(n)$$

$$E \nu(m) = \lambda(m)$$

**При фиксированном $\nu(m_0)$ события $\mathbf{(A)}$ независимы и
распределены согласно:**

$$p(x|x_0) = f_1(m) f_2(t - t_0) f_3[(g - g_0) \cdot |m]$$

$E\lambda(m) < 1$ - условие конечности кластера

Свойства ETAS (F)

1. ETAS (F = P) = ETAS (P-Пуассон)

2. F=P или G \Rightarrow тип распределений $\nu(m_0)$ и $\nu_{\Delta}(m_0)$ одинаков +

$$\lambda_{\Delta}(m_0) = \lambda(m_0) \bar{F}_1(m_0 - \Delta) / \bar{F}_1(\Delta) \quad F_1(x) = \int_0^x f_1(u) du \quad (1)$$

$$\lambda_{\Delta}(m_0) = \lambda e^{2\beta\Delta} e^{-(\beta-\alpha)m_0} \Big|_{\alpha=\beta} = \lambda e^{2\beta\Delta} \text{ не зависит от } m_0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

\Rightarrow ETAS (G) сохраняет закон Утсу и G-распределение для $\nu_{\Delta}(m_0)$

3. ETAS (G, $\lambda(m) = \Lambda$) = ETAS*:

- нет закона Утсу

- $\lambda_{\Delta}(m_0) = \Lambda \bar{F}_1(m_0 - \Delta) / \bar{F}_1(\Delta)$ зависит от $m \quad \forall \beta$

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

ETAS: $F=P$ или G ; $f_1(m), f_2(t), f_3(g|m)$ -любые

$0 < \lambda(m) < \infty$ неубывающая функция, $E\lambda(m) < 1$

а) для фиксированной/случайной начальной магнитуды V_Δ и $\lambda(m)$ имеют одинаковое число конечных моментов

$$\mathcal{N}(V_\Delta) = \mathcal{N}(\lambda)$$

б) для основного толчка $\mathcal{N}(V_\Delta) = \infty$

-если m_0 фиксировано

- если m_0 случайно $+\lambda(m) \int_0^\Delta f_1(m-x) dx \leq C$

с) m_0 основной толчок в ETAS (G) кластере и $f_1(m) > 0 \Rightarrow$

$V_\Delta(m_0)$ не может иметь геометрическое распределение для любого $\Delta \in$

$(0, m_0) \setminus \Delta_0$

СЛЕДСТВИЯ

1. В моделях ETAS (P/G) с законами Utsu и GR ($\alpha < \beta$)

$$\mathcal{N}(\lambda) \leq \alpha / \beta \text{ и } \lambda(m) \int_0^\Delta f_1(m-x) dx \leq C$$

$\Rightarrow V_\Delta$ имеет *легкий хвост* для *афтершоков* и *тяжелый* в общем случае (как в реальных данных!)

2. ETAS(G, $\alpha = 0$) = ETAS* $\Rightarrow V_\Delta$ имеет только *легкие хвосты*

3. G-законы для v_Δ и V_Δ несовместимы в одной ETAS модели

Почему хвосты легкие для афтершоков?

Основной толчок *фиксированной* магнитуды m сужает диапазон магнитуд до конечных размеров, где $\lambda(m)$ имеет все моменты.

Если m случайно, утверждение нетривиально.

Master equation

1) Произвольное начальное событие

$$N_M(m_0) =_{\text{law}} \sum_1^{v(m_0)} \{N_M(m_i) + [m_i \geq M]\}$$

$N_M(m_0)$ = число событий $m \geq M$ в кластере с началом m_0

$\{m_i, i = 1, \dots, v(m_0)\}$ события первой генерации

$N_M(m_i)$ независимы при фиксированном $v(m_0)$

$$V_\Delta(m) = N_{m-\Delta}(m), \quad m \geq \Delta.$$

2) ETAS(P/G) кластер для основного толчка

= ETAS(P/G) кластер с новыми характеристиками

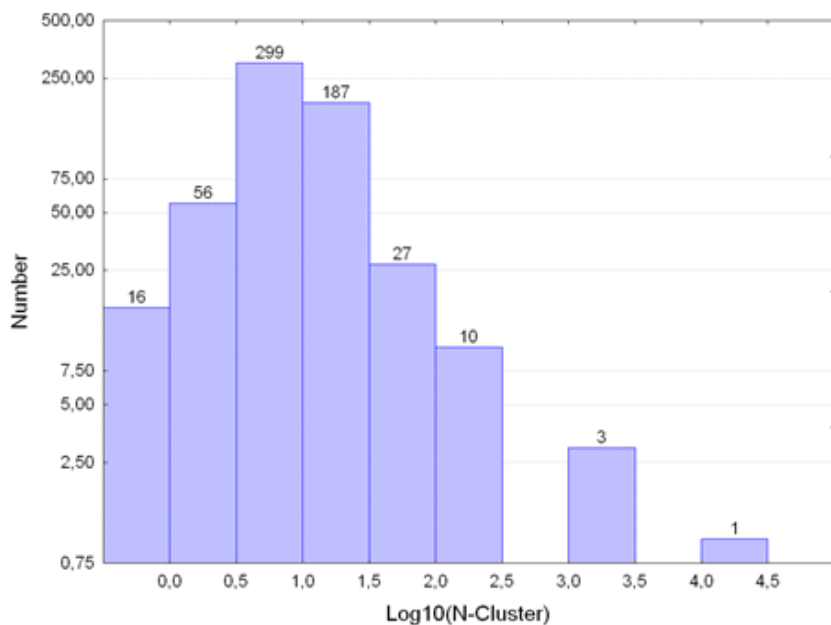
$$f_1(m) \Rightarrow f_1(m) / F_1(m_0), 0 \leq m \leq m_0$$

$$\lambda(m) \Rightarrow \lambda(m) F_1(m_0) \begin{cases} 1, & F = P \\ (1 + \lambda(m) \bar{F}_1(m_0))^{-1}, & F = G \end{cases}$$

$$3) \xi \sim G \Rightarrow E\xi(\xi - 1) / (E\xi)^2 = 2$$

Численный пример

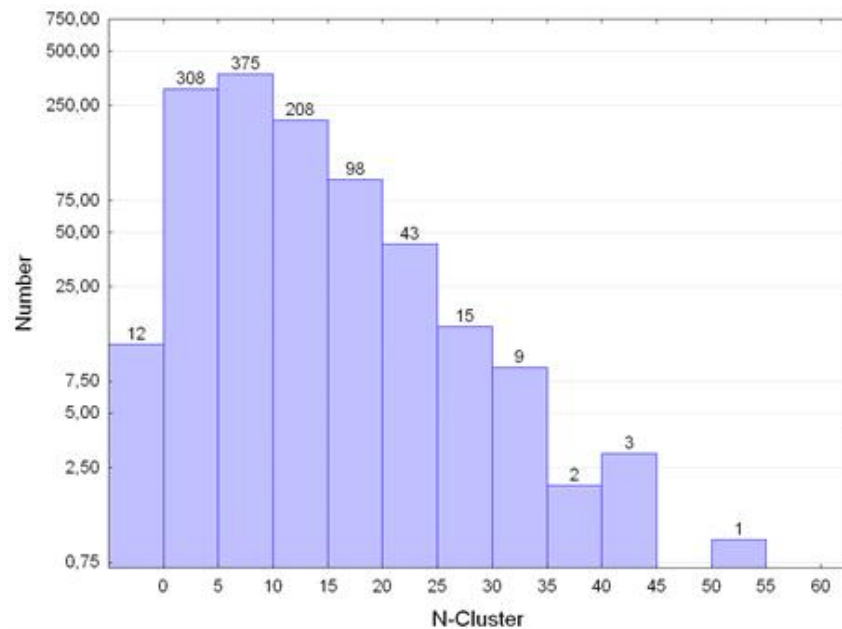
ETAS (P), Friuli-region, T=500 лет, $m_0 \geq 4$, $\Delta = 2$



(a) m_0 -любое

$$N = 608 \quad EV_{\Delta} = 40.0 \quad \sigma(V_{\Delta}) = 432.8$$

$$\sigma(V_{\Delta}) / EV_{\Delta} = 10.8 \quad \max V_{\Delta} = 10084$$



(b) m_0 -основное событие

$$N = 1074 \quad EV_{\Delta} = 9.6 \quad \sigma(V_{\Delta}) = 6.7$$

$$\sigma(V_{\Delta}) / EV_{\Delta} \approx 0.7 \quad \max V_{\Delta} = 54$$

Обсуждение

Трудности обоснования законов продуктивности:

-Декластеризация

**40% событий ассоциируются с чужими родителями
(Zaliarin & Ben-Zion, 2013)**

-Эффект осреднения

**Усреднение экспоненциальных распределений
сохраняет монотонность, но не сохраняет тип**

- бимодальность в примере Кагана для V_{Δ}

-несовместность G-законов для ν_{Δ} и V_{Δ} в одной ETAS модели

Слабый вариант закона продуктивности V_{Δ}

Легкие хвосты для афтершоков и тяжелые для произвольных кластеров. (Тип распределении ν не важен)

**Вопрос: V_{Δ} распределение для кластеров с малым тепловым потоком
по данным Zaliarin, BenZion, 2016**